Практическая работа №12
Тема: «Задачи на приложения двойных интегралов»

Цель – проверка знаний понятие функции двух переменных, предел функции двух переменных, определенный интеграл и его свойства, таблица неопределенных интегралов, свойства двойных интегралов, двукратный интеграл;
Умения: Находить двойные интегралы сведением его к повторному (двукратному) интегралу.

Пример 1.

Вычислить двойной интеграл $\int_D (x+2y)dxdy$ по области D , ограниченной линиями $y=x$, $y=4x$, $y=\frac{4}{x}$.

Решение:

Находим точки пересечения этих линий (рис.1):

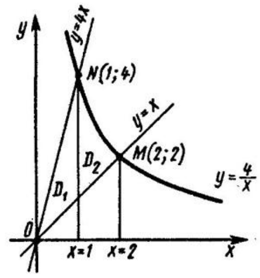

Рис.1

$$\begin{cases} y = 4x \\ y = \dfrac{4}{x}\,, \quad N(1;4) \end{cases}$$

Область D разобьем на две области D_1 и D_2, которые соответственно определяются системами неравенств $0 \le x \le 1, x \le y \le 4x,$ и $1 \le x \le 2, x \le y \le {}^4\!/_x$.

Вычислим двойной интеграл по области D_1:

$$I_1 = \iint\limits_{D_1} (x+2y)dxdy$$

$$= \int_0^1 dx \int_x^{4x} (x+2y)dy = \int_0^1 (xy+y^2)\Big|_x^{4x} dx = \int_0^1 (4x^2+16x^2-x^2$$

$$-x^2)dx = 18\int_0^1 x^2dx = 18\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 6$$

Вычислим двойной интеграл по области D_2:

$$I_2 = \iint\limits_{D_2} (x+2y)dxdy$$

$$= \int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{4/x} (x+2y)dy = \int\limits_1^2 (xy+y^2)\Big|_x^{4/x} dx = \int\limits_1^2 \Big(4+\frac{16}{x^2}-x^2$$

$$-x^2\Big)dx = \int\limits_1^2 (4+16x^{-2}-2x^2)dx = \Big(4x-\frac{16}{x}-\frac{2}{3}x^3\Big)\Big|_1^2 = 7\frac{1}{3}$$

Значит, $I = I_1 + I_2 = 6 + 7\frac{1}{3} = 13\frac{1}{3}$

Приложения двойного интеграла

Двойной интеграл применяется для вычисления:

а) Объема тела

Объем цилиндрического тела находится по формуле

$$V = \iint\limits_D \mathrm{f(x,y)dxdy}$$

где $z = f(x,y)$ - уравнение поверхности, ограничивающей тело сверху;

б) Площади плоской фигуры

Формула для вычисления площади S области D

$$S = \iint\limits_D \mathrm{dxdy}$$

в) Массы плоской фигуры

Масса плоской пластинки D с переменной плотностью $\gamma = \gamma(x,y)$ находится по формуле

$$m = \iint\limits_D \gamma\mathrm{(x,y)dxdy}$$

г) Статических моментов плоской фигуры

Статические моменты плоской фигуры D относительно осей Ox и Oy вычисляются соответственно по формулам

$$S_x = \iint\limits_D \mathrm{y}\cdot\gamma\mathrm{(x,y)dxdy} \qquad S_y = \iint\limits_D \mathrm{x}\cdot\gamma\mathrm{(x,y)dxdy}$$

д) Координат центра тяжести плоской фигуры.

Координаты центра масс фигуры вычисляются по формулам

$$x_C = \frac{S_y}{m} \qquad y_C = \frac{S_x}{m}$$

ВАРИАНТ 1

1) Вычислить площадь области, ограниченной линиями $y = x^2$, $4y = x^2$, $y = 4$.

2) Найти массу фигуры, лежащей в первой четверти, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ и координатными осями. Поверхностная плотность в каждой точке фигуры равна произведению координат точки.

ВАРИАНТ 2

1)Вычислить площадь области, ограниченной линиями $y = \ln x$, $x - y = 1$, $y = -1$.

2) Найти массу круглой пластинки радиуса 10 , если плотность ее пропорциональна квадрату расстояния точки от центра и равна 5 на краю пластинки

ВАРИАНТ 3

1)Вычислить площадь области, ограниченной линиями $xy = 4$, $x + y = 5$.

2)Найти массу пластинки, имеющей форму прямоугольного треугольника с катетами ОВ=3, ОА=4, если плотность ее в любой точке равна расстоянию точки от катета ОА

ВАРИАНТ 4

1) Вычислить площадь области, ограниченной линиями
$x + y = 2$, x+2y=2, y=0.

2)Найти координаты центра масс однородной пластинки, ограниченной линиями $y^2 = x$ и $x^2 = y$.